ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 126 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186

УДК 511.5

Целочисленные треугольники, уравнение Пелля и многочлены Чебышева

Владимир Федорович МОЛЧАНОВ, Елена Сергеевна ЮРЬЕВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2949, e-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4015-9863, e-mail: lena_yuryeva21@mail.ru

Integer triangles, Pell's equation and Chebyshev polynomials

Vladimir F. MOLCHANOV, Elena S. YURYEVA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2949, e-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4015-9863, e-mail: lena_yuryeva21@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые виды целочисленных треугольников: «почти равносторонние», прямоугольные «почти равнобедренные», прямоугольные «с углом почти в 30 градусов». Их описание сводится к уравнению Пелля. Изложение теории уравнения Пелля основывается на «итерационной матрице». Ее степени выражаются через многочлены Чебышева.

Ключевые слова: целочисленные треугольники; формула Герона; уравнение Пелля; многочлены Чебышева

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ (госзадание № 3.8515.2017/8.9).

Для цитирования: *Молчанов В.Ф., Юрьева Е.С.* Целочисленные треугольники, уравнение Пелля и многочлены Чебышева // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 179–186. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186.

Abstract. In this paper we consider some types of integer triangles: “almost equilateral”, rectangular “almost isosceles”, rectangular “whose angle is almost 30°”. The description is reduced to Pell's equation. We state the theory of Pell's equation on the basis of an “iterated matrix”. Powers of this matrix are expressed in terms of Chebyshev polynomials.

Keywords: integer triangles; Heron's formula; Pell's equation; Chebyshev polynomials

Acknowledgements: The work is supported by the program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/8.9).

For citation: Molchanov V.F., Yuryeva E.S. Tselochislennye treugol'niki, uravnenie Pellya i mnogochleny Chebysheva [Integer triangles, Pell's equation and Chebyshev polynomials]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 179–186. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Уравнение Пелля

Уравнением Пелля называется диофантово уравнение

$$x^2 - Dy^2 = L, \tag{1.1}$$

где D — целое положительное число, причем $\sqrt{D}$ — иррациональное, а число L — целое. По поводу этих уравнений см. [1], [5], в [5] рассматривается только $L = 1$. Мы будем иметь дело с $L = \pm 1$. Это уравнение надо решить в целых числах. Больше мы не будем повторять, что решения — целые. Достаточно искать решения среди *неотрицательных* чисел. Обозначим через S множество всех решений уравнения (1.1) — векторов $z = (x, y)$ таких, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Рассмотрим линейные преобразования с матрицей A:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \alpha x + \beta y \\ v = \gamma x + \delta y \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

переводящие S в S.

Теорема 1.1. *Матрица линейного преобразования* (1.2)*, переводящего S в S, есть $\pm A$, где*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

здесь α, γ — целые числа > 0, $\alpha^2 - D\gamma^2 = 1$, так что $\det A = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напишем (1.1) для u, v, подставим (1.2) и коэффициенты при x^2, y^2, xy приравняем 1, $-D$, 0, соответственно, а именно:

$$\alpha^2 - D\gamma^2 = 1$$
$$\beta^2 - D\delta^2 = -D$$
$$\alpha\beta - D\gamma\delta = 0.$$

Из этих уравнений получаем $\alpha^2 = \delta^2$, $\beta^2 = D^2\gamma^2$. Возьмем $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, тогда этим уравнениям удовлетворяют 4 матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -D\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -D\gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим здесь первую матрицу через A, тогда эти 4 матрицы таковы:

$$A, \quad CA, \quad AC, \quad -A, \quad \text{где } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применим эти матрицы к векторам из S. Первая сохраняет S, остальные три выводят из S, в самом деле, вторая и третья меняют знак второй координаты, четвертая меняет знак обеих координат. $\square$

Обозначим через M матрицу A с наименьшим $\alpha > 0$:

$$M = \begin{pmatrix} p & Dq \\ q & p \end{pmatrix}, \quad p^2 - Dq^2 = 1.$$

Всякая матрица A из теоремы 1.1 есть степень матрицы M:

$$A = M^n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Совокупность всех матриц A, их обратных и единичной матрицы образует бесконечную циклическую группу с образующим M. Обозначим

$$M^n = \begin{pmatrix} p_n & Dq_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}, \quad p_n^2 - Dq_n^2 = 1.$$

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$ — наименьшее положительное решение уравнения (1.1). Тогда всякое решение получается из z_1 с помощью матрицы M:

$$z_n = (x_n,\, y_n) = M^{n-1} z_1,$$

или

$$x_{n+1} = p_n\, x_1 + D\, q_n\, y_1, \quad y_{n+1} = q_n\, x_1 + p_n\, y_1.$$

Характеристический многочлен матрицы M есть многочлен $\lambda^2 - 2p\lambda + 1$, поэтому $M^2 - 2pM + E = 0$ и потому

$$M^{n+2} - 2p\, M^{n+1} + M^n = 0. \tag{1.3}$$

Точно такое же рекуррентное соотношение справедливо для величин, линейно связанных с M^n, а именно, матричных элементов p_n, q_n, собственных чисел λ_1^n, λ_2^n, для решений $z_n = (x_n, y_n)$ уравнения (1.1), в частности, для последовательностей x_n и y_n в отдельности:

$$x_{n+2} - 2p\, x_{n+1} + x_n = 0, \quad y_{n+2} - 2p\, y_{n+1} + y_n = 0.$$

Здесь λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы M:

$$\lambda_1 = p + \sqrt{p^2 - 1} = p + q\sqrt{D}, \quad \lambda_2 = p - \sqrt{p^2 - 1} = p - q\sqrt{D}.$$

Приведем матрицу M к диагональному виду:

$$M = B^{-1}TB, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве B можно взять

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{D} & 1 \\ -1 & \sqrt{D} \end{pmatrix}.$$

Тогда $M^n = B^{-1}T^nB$ и потому

$$z_n = B^{-1}T^{n-1}B\, z_1.$$

Следовательно, x_n и y_n являются линейными комбинациями степеней собственных чисел:

$$x_n = C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n, \quad y_n = D_1\,\lambda_1^n + D_2\,\lambda_2^n,$$

коэффициенты C_j и D_j можно найти с помощью начальных условий, см. [3], [4]. Больше того, используя матрицу B, мы можем написать явные выражения:

$$x_n = \frac{1}{2}\left\{(x_1 + y_1\sqrt{D})\,\lambda_1^{n-1} + (x_1 - y_1\sqrt{D})\,\lambda_2^{n-1}\right\} \tag{1.4}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{(x_1 + y_1\sqrt{D})\,\lambda_1^{n-1} - (x_1 - y_1\sqrt{D})\,\lambda_2^{n-1}\right\}. \tag{1.5}$$

Если $L = 1$, то $(x_1, y_1) = (p, q)$, так что последние формулы упрощаются:

$$x_n = \frac{1}{2}\left\{\lambda_1^n + \lambda_2^n\right\}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{\lambda_1^n - \lambda_2^n\right\}$$

Отметим связь матриц M^n с многочленами Чебышева. Напомним (см., например, [2]), что многочлены Чебышева $T_k(x)$ и $U_k(x)$ степени k первого и второго рода определяются формулами

$$T_k(x) = \cos k\alpha\,, \quad U_k(x) = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\,,$$

где $x = \cos\alpha$. Они удовлетворяют конечно-разностному уравнению

$$T_{k+2}(x) - 2x\,T_{k+1}(x) + T_k(x) = 0, \tag{1.6}$$

и точно такое же имеет место для $U_k(x)$. Вот несколько первых многочленов:

$$\begin{array}{ll} T_0(x) = 1 & U_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x & U_1(x) = 2x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 & U_2(x) = 4x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x & U_3(x) = 8x^3 - 4x \end{array}$$

Теорема 1.2. *Матрицы* M^n *выражаются через многочлены Чебышева:*

$$M^n = \begin{pmatrix} T_n(p) & qD\,U_{n-1}(p) \\ q\,U_{n-1}(p) & T_n(p) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В самом деле, обе части равенства (1.7) удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному уравнению, см. (1.3) и (1.6) с $x = p$, и совпадают при $n = 1, 2$.

2. Целочисленные треугольники

Треугольник называется *целочисленным*, или *героновым*, если его стороны a, b, c и площадь S выражаются целыми числами. Мы рассмотрим три вида таких треугольников.

(A). Целочисленный треугольник назовем «почти равносторонним», если его стороны — три последовательных числа: $b-1$, b, $b+1$. Найдем все такие треугольники.

По формуле Герона имеем

$$S^2 = \frac{3}{16}\,b^2\left(b^2 - 4\right).$$

Следовательно, b делится на 2, пусть $b = 2x$, тогда $S^2 = 3x^2\left(x^2 - 1\right)$. Здесь $x^2 - 1$ должно делиться на 3, а частное должно быть полным квадратом: $x^2 - 1 = 3y^2$. Таким образом, $S = 3xy$ и

$$x^2 - 3y^2 = 1. \tag{2.1}$$

Получили уравнение Пелля, изученное в § 1. Здесь $D = 3$, $L = 1$, наименьшее положительное решение есть $z_1 = (2, 1)$, матрица M есть

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

с собственными числами $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$, так что

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right), \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right),$$

рекуррентное соотношение для x_n таково:

$$x_{n+2} - 4\,x_{n+1} + x_n = 0, \tag{2.2}$$

и такое же для y_n. Соберем числовые результаты в таблицу

Таблица A

n	x	y	$b-1$	b	$b+1$	S
0	1	0	1	2	3	0
1	2	1	3	4	5	6
2	7	4	13	14	15	84
3	26	15	51	52	53	1170
4	97	56	193	194	195	16296
5	362	209	723	724	725	226974
...	...	...	...	...	...	...

(B). Целочисленный прямоугольный треугольник назовем «почти равнобедренным», если длины его катетов отличаются на единицу. Пусть гипотенуза равна c, катеты равны b, $b+1$, тогда — по теореме Пифагора имеем: $c^2 = b^2+(b+1)^2$, или $2b^2+2b+1 = c^2$. Умножим на 2 и выделим полный квадрат:

$$(2b+1)^2+1 = 2c^2.$$

Обозначим $2b+1 = x$, $c = y$. Тогда получим уравнение Пелля

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

с $D = 2$, $L = -1$. Здесь наименьшее положительное решение есть $z_1 = (1,1)$, матрица M есть

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

с собственными числами $\lambda_1 = 3+2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3-2\sqrt{2}$. Рекуррентное соотношение для x_n таково:

$$x_{n+2} - 6\,x_{n+1} + x_n = 0,$$

и такое же для y_n. Формулы (1.4) и (1.5) сейчас можно написать проще: заметим, что λ_1, λ_2 являются квадратами чисел $\mu_1 = \sqrt{2}+1$ и $\mu_2 = \sqrt{2}-1$, соответственно, входящих в коэффициенты в (1.4) и (1.5), поэтому

$$x_n = \frac{1}{2}\left\{\mu_1^{2n-1} - \mu_2^{2n-1}\right\}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\mu_1^{2n-1} + \mu_2^{2n-1}\right\}.$$

Соберем числовые результаты в таблицу

Таблица B

n	x	y	b	$b+1$	c	S
0	1	1	0	1	1	0
1	7	5	3	4	5	6
2	41	29	20	21	29	210
3	239	169	119	120	169	7140
4	1393	985	696	697	985	242556
5	8119	5741	4059	4060	5741	8239770
...	...	...	...	...	...	...

(C). Целочисленный прямоугольный треугольник назовем «с углом почти в $30°$», если длина c гипотенузы «почти в 2 раза» больше длины a одного катета: $c = 2a \pm 1$ (два варианта). Пусть длина второго катета равна b, тогда — по теореме Пифагора имеем: $a^2 + b^2 = (2a \pm 1)^2$, или $3a^2 \pm 4a + 1 - b^2 = 0$. Умножим на 3 и выделим полный квадрат:

$$(3a \pm 2)^2 - 3b^2 = 1.$$

Обозначим $3a \pm 2 = x$, $b = y$, получим уравнение Пелля

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

Это — уравнение (2.1), здесь $D = 3$, $L = 1$, наименьшее положительное решение есть $z_1 = (2, 1)$, см. пункт **(A)** по поводу остальных величин. Возьмем конечно-разностное уравнение (2.2) по модулю 3, получим сравнение $x_{n+2} \equiv x_{n+1} - x_n \pmod 3$. Из него следует, что $x_n \equiv 1$ при четном n и $x_n \equiv 2$ при нечетном n. Так как $a = (x \mp 2)/3$, то

$$a_n = \frac{1}{3}\Big\{x_n + (-1)^n 2\Big\}.$$

В таблице $c = 2a - 1$ и $c = 2a + 1$ соответственно тому, четно или нечетно n.

Таблица C

n	x	y	a	b	c	S
0	1	0	1	0	1	0
1	2	1	0	1	1	0
2	7	4	3	4	5	6
3	26	15	8	15	17	60
4	97	56	33	56	65	924
5	362	209	120	209	241	12540
...	...	...	...	...	...	...

Список литературы

[1] И. В. Арнольд, *Теория чисел*, Учпедгиз, М., 1939.

[2] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, *Высшие трансцендентые функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.

[3] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, М., 1969.

[4] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Гостехиздат, М.–Л., 1952.

[5] А. Ю. Эвнин, "Уравнения Пелля", *Математика в высшем образовании*, **7** (2013), 89–94.

References

[1] I. V. Arnold, *Number Theory*, Uchpedgiz, Moscow, 1939 (In Russian).

[2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project)*. V. 2, McGraw-Hill, New York, 1953.

[3] N. Ya. Vlenkin, *Combinatorial Analysis*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russian).

[4] A. O. Gelfond, *Calculus of Finite Differences*, Gostekhizdat, Moscow, St. Petersburg, 1952 (In Russian).

[5] A. Yu. Evnin, "Pell's equations", *Mathematics in Higher Education*, **7** (2013), 89–94 (In Russian).

Информация об авторах

Молчанов Владимир Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v.molchanov@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2949

Юрьева Елена Сергеевна, магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lena_yuryeva21@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4015-9863

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Молчанов Владимир Федорович
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 18.03.2019 г.
Принята к публикации 20.05.2019 г.

Information about the authors

Vladimir F. Molchanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: v.molchanov@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2949

Elena S. Yuryeva, Master's Degree Student in «Mathematics» Programme. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: lena_yuryeva21@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4015-9863

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vladimir F. Molchanov
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Received 30 January 2019
Reviewed 18 March 2019
Accepted for press 20 May 2019